**Целое число**

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/83/Integers-line.svg/300px-Integers-line.svg.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Integers-line.svg?uselang=ru)

Целые числа на [числовой прямой](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%BE%D1%81%D1%8C)

**Целые числа** — расширение [множества](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) [натуральных чисел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) \mathbb{N}, получаемое добавлением к \mathbb{N} [нуля](https://ru.wikipedia.org/wiki/0_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE)) и [отрицательных чисел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) вида -n. Множество целых чисел обозначается \mathbb{Z}.Необходимость рассмотрения целых чисел продиктована невозможностью, в общем случае, вычесть из одного натурального числа другое — можно вычитать только меньшее число из большего.

[Сумма](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%83%D0%BC%D0%BC%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)), разность и произведение двух целых чисел дают снова целые числа, то есть целые числа образуют [кольцо](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%86%D0%BE_(%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)) относительно операций сложения и [умножения](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5). Впервые отрицательные числа стали использовать в древнем Китае и в Индии, в Европе их ввели в математический обиход [Николя Шюке](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D1%8E%D0%BA%D0%B5,_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8F) (1484 год) и [Михаэль Штифель](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D1%82%D0%B8%D1%84%D0%B5%D0%BB%D1%8C,_%D0%9C%D0%B8%D1%85%D0%B0%D1%8D%D0%BB%D1%8C) (1544).

**Алгебраические свойства**

\mathbb{Z} не замкнуто относительно [деления](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) двух целых чисел (например, 1/2). Следующая таблица иллюстрирует несколько основных свойств сложения и умножения для любых целых *a*, *b* и *c*.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | сложение | умножение |
| [замкнутость](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B7%D0%B0%D0%BC%D0%BA%D0%BD%D1%83%D1%82%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C): | *a* + *b*   — целое | *a* × *b*   — целое |
| [ассоциативность](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%81%D1%81%D0%BE%D1%86%D0%B8%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F): | *a* + (*b* + *c*)  =  (*a* + *b*) + *c* | *a* × (*b* × *c*)  =  (*a* × *b*) × *c* |
| [коммутативность](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BC%D1%83%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F): | *a* + *b*  =  *b* + *a* | *a* × *b*  =  *b* × *a* |
| существование [нейтрального элемента](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%B9%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%8D%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82): | *a* + 0  =  *a* | *a* × 1  =  *a* |
| существование [противоположного элемента](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%8D%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82): | *a* + (−*a*)  =  0 | *a*  ≠  ±1  ⇒  1/*a* не является целым |
| [дистрибутивность](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B1%D1%83%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) умножения относительно сложения: | *a* × (*b* + *c*)  =  (*a* × *b*) + (*a* × *c*) | |

На языке [общей алгебры](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%89%D0%B0%D1%8F_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0) первые пять вышеперечисленных свойств сложения говорят о том, что \mathbb{Z} является [абелевой группой](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%B0_%D0%B3%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF%D0%B0) относительно бинарной [операции](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F) сложения, и, следовательно, также [циклической группой](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF%D0%B0), так как каждый ненулевой элемент \mathbb{Z} может быть записан в виде конечной суммы 1 + 1 + … 1 или (−1) + (−1) + … + (−1). Фактически, \mathbb{Z} является *единственной* бесконечной циклической группой по сложению в силу того, что любая бесконечная циклическая [группа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) [изоморфна](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%B7%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%80%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%BC_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) группе (\mathbb{Z},+).

Первые четыре свойства умножения говорят о том, что \mathbb{Z} — коммутативный [моноид](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%B8%D0%B4) по умножению. Однако стоит заметить, что не каждое целое имеет противоположное по умножению, например, нет такого x из \mathbb{Z}, что 2x = 1, так как левая часть уравнения чётна, а правая нечётна. Из этого следует, что \mathbb{Z}не является группой по умножению, а также не является [полем](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%B5_(%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)). Наименьшее поле, содержащее целые числа, — [множество рациональных чисел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) (\mathbb{Q}).

Совокупность всех свойств таблицы означает, что \mathbb{Z} является коммутативным [кольцом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%86%D0%BE_(%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)) с единицей относительно сложения и умножения.

Обычное деление не определено на множестве целых чисел, но определено так называемое **деление с остатком**: для любых целых *a* и *b*, b \not= 0, существует единственный набор целых чисел *q* и *r*, что a = bq + r и 0 \le r < |b|, где |*b*| — [абсолютная величина](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D0%BE%D0%BB%D1%8E%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0) (модуль) числа *b*. Здесь *a* — делимое, *b* — [делитель](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C), *q* — частное, *r* — остаток. На этой операции основан [алгоритм Евклида](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC_%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%B4%D0%B0) нахождения [наибольшего общего делителя](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D0%B8%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B8%D0%B9_%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B8%D0%B9_%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C) двух целых чисел.

**Теоретико-множественные свойства**

\mathbb{Z} — [линейно упорядоченное множество](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%BE_%D1%83%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BE%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) без верхней и нижней границ. Порядок в нём задаётся соотношениями:

… < −2 < −1 < 0 < 1 < 2 < …

Целое число называется **положительным**, если оно больше нуля, **отрицательным**, если меньше нуля. Нуль не является положительным или отрицательным.

Для целых чисел справедливы следующие соотношения:

1. если *a* < *b* и *c* < *d*, тогда *a* + *c* < *b* + *d*.
2. если *a* < *b* и 0 < *c*, тогда *ac* < *bc*. (Отсюда легко показать, что если *c* < 0, то *ac* > *bc*.)

**Целые числа в вычислительной технике**

[Тип целое число](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BB%D1%8B%D0%B9_%D1%82%D0%B8%D0%BF) — зачастую один из основных [типов данных](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B8%D0%BF_%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85) в [языках программирования](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D0%B7%D1%8B%D0%BA_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F). Тем не менее, эти «целые числа» — лишь имитация класса \mathbb{Z} в математике, так как это множество бесконечно и всегда найдётся целое число, которое данный [компьютер](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%B5%D1%80) не сможет хранить в своей памяти. Целые типы данных обычно реализуются как фиксированный набор [битов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D1%82), но любые представления, в конце концов, приведут к тому, что свободное место на [носителе](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C_%D0%B8%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B8) ([жёстком диске](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA)) закончится. С другой стороны, теоретические модели цифровых компьютеров имеют потенциально бесконечное (но счётное) пространство.